PROBABILITÉS FINIES

Deux semaines et demie

Table des matières

ECUE **3**

Motivation **3**

Attendus **3**

1 Modéliser une expérience aléatoire **4**
1.1 Résumé . . . 4
1.2 Exercices . . . 4
Exercice 1.1 . . . 4
Exercice 1.2 . . . 4
Exercice 1.3 . . . 5
Exercice 1.4 . . . 5

2 Équiprobabilité **5**
2.1 Résumé . . . 5
2.2 Exercices . . . 5
Exercice 2.5 . . . 5
Exercice 2.6 . . . 5

3 Probabilités conditionnelles et indépendance **6**
3.1 Résumé . . . 6
3.2 Exercices . . . 6
Exercice 3.7 . . . 6
Exercice 3.8 . . . 7
Exercice 3.9 . . . 7
Exercice 3.10 . . . 7
★ Exercice 3.11 . . . 7
Exercice 3.12 . . . 8

4 Variables aléatoires discrètes finies **8**
4.1 Résumé . . . 8
4.2 Exercices . . . 8
Exercice 4.13 . . . 8
Exercice 4.14 . . . 8
Exercice 4.15 . . . 9
★ Exercice 4.16 . . . 9
Exercice 4.17 . . . 9

5 Lois usuelles **9**
5.1 Résumé 9
5.2 Exercices 10
Exercice 5.18 10
Exercice 5.19 10
Exercice 5.20 10
Exercice 5.21 11
★ Exercice 5.22 11

ECUE

Cette feuille de TD fait partie de **l'ECUE DP** : dénombrement et probabilités.

Pré-requis : ECUE OBM (Outils de base mathématiques) fait en séminaire.

Motivation

Il n'y a pas de phénomène observable qui ne recèle une part d'aléatoire. Cet aléatoire traduit souvent le fait qu'il nous est difficile de décrire l'ensemble des paramètres qui régissent un système ; la vision que l'on en a est donc parcellaire, et à cause de cette connaissance incomplète le comportement de ce système nous apparaît comme aléatoire. Il nous est par exemple parfaitement accessible de prédire l'obtention d'un ***pile*** ou ***face*** lors du jet d'une pièce, mais cela vient au prix d'une quantité démesurée d'informations physiques ; positionnement de la pièce, forces exercées sur celle-ci, type de matériaux pour le plan d'atterrissage, frottement de l'air etc. Le choix raisonnable de manquer d'informations sur l'état exact du système nous renvoie à un phénomène aléatoire. Parfois, la description des paramètres du système n'est pas seulement difficile mais impossible ; le comportement d'une particule physique ne peut être décrit sans en perturber l'état [1], il est de fait aléatoire.

La théorie des probabilités a pour but de ***modéliser*** les phénomènes aléatoires (dans le jargon on parle d'***expérience aléatoire***). C'est une théorie d'une grande généralité qu'on limite dans un premier temps au cas des probabilités finies, celles qui décrivent les expériences aléatoires dont l'ensemble des issues possibles est fini. Cela concerne par exemple le résultat d'un jeu de dés, ou le tirage gagnant du loto. Les probabilités finies ont l'avantage de présenter une grande part du formalisme de la théorie des probabilités sans pour autant requérir de manipuler des objets compliqués dans le cadre général. Les probabilités finies ont déjà leur place dans le bagage de l'ingénieur informaticien ; le calcul de la complexité en moyenne d'un algorithme ne se fait qu'au frais d'une hypothèse sur le type d'aléatoire qui régit les données en entrée, le temps d'attente (par tranches) lors de la connexion à un serveur peut également être décrit par les outils qu'on introduit par la suite, ou encore le risque pris à choisir un trajet plutôt qu'un autre lors d'un déplacement. Les probabilités en général apparaissent évidemment de manière marquée en apprentissage automatique, en traitement de l'image, elles sont également d'usage implicite mais constant en statistiques – domaine auquel tout ingénieur doit consacrer du temps, d'autant plus en cette époque d'émergence du *big data*.

Attendus

Les AAV concernant cette feuille de TD sont les suivants :

On attend de vous de
— Modéliser des expériences aléatoires simples en utilisant le langage probabiliste (espace probabilisé ou loi d'une variable aléatoire par exemple).
— Calculer les probabilités dans des situations d'équiprobabilité, de probabilités conditionnelles et d'événements indépendants.
— Interpréter l'espérance et la variance d'une variable aléatoire simple discrète et finie ainsi que des transformations affines de celle-ci.

Plus particulièrement et en détails :

⋆ Modéliser une expérience aléatoire en décrivant l'espace probabilisé, les issues et les événements.

⋆ Calculer des probabilités en cas d'équiprobabilité.

⋆ Calculer des probabilités conditionnelles (avec ou sans arbre) dans un univers fini.

⋆ Calculer des probabilités conditionnelles à l'aide de la formule des probabilités totales.

⋆ Interpréter l'indépendance de deux événements.

⋆ Déterminer la loi, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire finie discrète et finie.

1. Principe d'incertitude de Heisenberg.

- ⋆ Exprimer une variable aléatoire discrète et finie comme somme de variables aléatoires indépendantes plus simples. Exemples avec la loi de Bernoulli et la loi binomiale.

On relève ici certains points qui vous sont parfois marqueurs de difficultés de compréhension, qu'on vous invite à travailler avec un certain appui :

- ⋆ une probabilité ne peut pas prendre des valeurs négatives ou plus grandes que 1, il est vital de vérifier la cohérence de ses résultats
- ⋆ des événements incompatibles ne sont pas nécessairement indépendants et inversement.

1 Modéliser une expérience aléatoire

1.1 Résumé

Quantifier le hasard signifie affecter, à chaque issue de l'expérience aléatoire à l'étude, une proportion (comprise entre 0 et 1) qui estime les chances de réalisation de celle-ci. Cette quantification ***dépend*** de l'expérience aléatoire qu'on étudie, cela sous-entend qu'on a une étape de ***modélisation*** qui rentre en jeu quand on se confronte à une expérience aléatoire. Cela signifie que l'on se retrouve à choisir, parmi les modèles probabilistes à notre disposition, celui qui colle au mieux à notre expérience. Une partie de ce processus de *choix* consiste à vérifier la cohérence des définitions que l'on donne.

Afin de manipuler analytiquement ce genre de phénomène, on introduit le concept de variable aléatoire, qui à chaque événement élémentaire associe une valeur correspondant à l'observation d'un résultat en fonction de la configuration obtenue pour notre expérience aléatoire. Ainsi, la loi d'une variable aléatoire décrit pour chaque valeur la probabilité que le résultat observé corresponde à cette valeur, ou encore la somme des probabilités de tous les événements élémentaires amenant à ladite valeur. Il est capital de savoir modéliser une expérience en variable aléatoire et en loi de probabilité afin de pouvoir utiliser l'expérience dans des calculs.

1.2 Exercices

Exercice 1.1

Soient Ω un ensemble et $f : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les 3 axiomes suivants :

(i) $f(\Omega) = 1$
(ii) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad f(A) \geqslant 0$
(iii) $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, \quad \text{si} \quad A \cap B = \emptyset \quad \text{alors} \quad f(A \sqcup B) = f(A) + f(B)$

À l'aide de ces trois axiomes, justifiez les relations suivantes :

1. $f(\emptyset) = 0$;
2. $f(\overline{A}) = 1 - f(A)$;
3. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $0 \leqslant f(A) \leqslant 1$;
4. Si $A \subset B$, $f(B \backslash A) = f(B) - f(A)$ et $f(A) \leqslant f(B)$;
5. Pour tout A, $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$.

À votre avis, comment s'appelle l'espace $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), f)$? Comment f s'appelle-t-elle ?

Exercice 1.2

Pour chaque expérience, décrire l'univers Ω et calculer la probabilité de chaque issue possible.

1. le jet d'une pièce de monnaie
2. le lancer d'un dé à 6 faces
3. le lancer de deux dés à 6 faces de couleurs différentes
4. le tirage d'une boule dans une urne contenant 5 boules rouges et 6 boules blanches
5. le tirage avec remise de trois boules dans une urne contenant 5 boules rouges et 6 boules blanches

6. le tirage simultané de trois boules dans une urne contenant 5 boules rouges et 6 boules blanches
7. le tirage successif et sans remise de trois boules dans une urne contenant 5 boules rouges et 6 boules blanches.

Exercice 1.3

Au début des questionnements sur la manière de définir la théorie des probabilités, H. Poincaré a posé la question suivante : lors du jet de deux dés indiscernables on peut ou bien obtenir une probabilité de $\frac{11}{36}$ ou de $\frac{6}{21}$ pour l'événement « obtenir au moins un 6 » ! Expliquer les deux calculs de Poincaré. Lequel vous semble juste ?

Exercice 1.4

1. Dans une population de $N > 1$ individus, à combien N doit-il être égal pour que l'on soit sûr qu'au moins deux personnes ont le même anniversaire ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes d'une population de $N > 1$ individus aient leur anniversaire le même jour de l'année ? [2]

2 Équiprobabilité

2.1 Résumé

On parle d'équiprobabilité lorsque la modélisation de l'expérience considérée sépare l'univers des possibilités en une partition d'événements élémentaires ayant tous la même probabilité, égale à l'inverse du cardinal de l'univers. Il s'agit du cas le plus simple : on parle de loi uniforme sur l'univers. Pour un événement donné, la probabilité de réalisation est donc le rapport entre le cardinal de cet événement et le cardinal de l'univers ; ce que l'on résume par la formule

$$\frac{\#(\text{cas favorables})}{\#(\text{cas possibles})}.$$

Un problème sous la condition d'équiprobabilité se réduit donc à un simple problème de dénombrement, consistant à compter les deux quantités énoncées.

La résolution de tels problèmes passe donc par la recherche d'une bonne partition, qui soit compatible avec les questions à résoudre et qui permette d'utiliser des stratégies de diviser pour régner.

2.2 Exercices

Exercice 2.5

Dans un jeu de 32 cartes, on tire une main de 5 cartes. Déterminer la probabilité qu'une main contienne :

1. exactement un as ;
2. au moins un as ;
3. la dame de trèfle ;
4. 4 trèfles dont la dame ;
5. exactement un trèfle et une dame.

Exercice 2.6

On lance simultanément deux dés à six faces non truqués. Déterminer la probabilité :

1. d'obtenir les deux mêmes résultats ;
2. que la somme des deux résultats soit paire ;
3. que la somme soit inférieure ou égale à 8 ;
4. que le plus grand des deux résultats soit inférieur ou égal à 4.

2. Cette question est le point de départ du paradoxe dit des *anniversaires*, wikipedia est votre ami !

3 Probabilités conditionnelles et indépendance

3.1 Résumé

Lorsque l'on étudie une expérience aléatoire il arrive souvent que l'information sur la potentialité de réalisation d'un événement sous une certaine hypothèse soit plus simple d'accès que l'information sur la réalisation de ce même événement sans cette hypothèse. Par exemple, on arrive plus facilement à estimer la probabilité d'avoir les yeux bleus chez un individu si l'on fait une hypothèse sur la couleur des yeux de chacun des parents. Les probabilités conditionnelles décrivent un cadre dans lequel on est en mesure d'exprimer la probabilité de réalisation de ce type d'événement *sous hypothèses*. Elles permettent également, par le biais de la formule des probabilités totales, de relier les probabilités de réalisation d'un événement le long d'un système complet d'événements [3] à la réalisation de celui-ci sans contraintes.

Dans certains cas la probabilité de réalisation d'un événement A sous l'hypothèse de réalisation d'un événement B (on parle de probabilité de A sachant B) est la même que la probabilité de réalisation de A sans la connaissance préalable de B. Autrement dit, la réalisation de l'événement B n'a pas d'impact sur celle de A. On dit dans ce cas que A et B sont des événements ***indépendants***. L'hypothèse d'indépendance d'événements ou plus généralement d'expériences aléatoires simultanées est une hypothèse fréquente qui, lorsqu'elle est vérifiée, simplifie grandement les modèles avec lesquels on travaille.

Historiquement, deux approches de la théorie des probabilités ont eu un apport conséquent sur la définition et l'évolution de celle-ci. La première approche, dite fréquentiste, cherche à définir la probabilité d'un événement par la fréquence de réalisation de celui-ci par rapport au nombre de fois où l'on observe le déroulement de l'expérience aléatoire de départ. La seconde, dite *bayésienne*, entrevoit la théorie des probabilités par sa capacité à décider de la potentielle réalisation conditionnelle d'un événement à partir d'une estimation *a posteriori* de celle-ci.

Si A et B sont deux événements de $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ de *probabilités non nulles*, alors :

$$\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(B \mid A)}{\mathrm{P}(B)}\mathrm{P}(A).$$

La formule précédente [4] peut se comprendre dans le contexte peu joyeux suivant : on note A l'événement qui correspond au fait d'avoir un cancer du poumon, l'événement B étant celui d'avoir une image par rayons X d'un type bien particulier. La probabilité de gauche est celle d'avoir un cancer sachant qu'on a une image par rayons X du type B, à droite la fraction reflète la propension à avoir une image par rayons X de type B parmi les malades, c'est notre connaissance. Par cet aspect on cherche à prédire la probabilité d'être malade sachant que l'on a un certain type d'image par rayons X, à partir d'une information *a posteriori* (la proportion d'images par rayons X de ce type parmi les malades).

La formule de Bayes [5] est une extension de la relation ci-dessus.

3.2 Exercices

Exercice 3.7

1. On tire au hasard un nombre entre 1 et 20. On considère les deux événements A : « Le nombre tiré est pair » et B : « Le nombre tiré est un multiple de 5 ».
   (a) A et B sont-ils incompatibles ?
   (b) A et B sont-ils indépendants ?
2. Reprendre les questions précédentes si, à présent, on tire une nombre au hasard entre 1 et 21.

3. Chose qu'on peut comprendre comme la réalisation d'un événement sous toutes les hypothèses possibles.
4. Facile à justifier, essayez.
5. On vous renvoie à votre cours.

Exercice 3.8

Énoncer et redémontrer la formule des probabilités totales [6].

Exercice 3.9

Travail Personnel obligatoire : dans une imprimerie de labeur de la région parisienne, la proportion d'affiches présentant un léger défaut au niveau des couleurs est de $0,05$. Le chef de fabrication a mis en place un contrôle qualité donnant les résultats suivants : si l'impression de l'affiche est parfaite, elle est acceptée avec la probabilité $0,96$ et si elle présente ce léger défaut de couleurs, elle est refusée avec la probabilité $0,98$.

1. Exprimer les données du problème sous forme de probabilité ou de probabilité conditionnelle d'évènements simples.
2. Déterminer la probabilité des évènements suivants sous forme de formule utilisant des probabilités conditionnelles puis sous forme de fraction simplifiée :
   (a) Il y a une erreur de contrôle ;
   (b) Une affiche acceptée présente un défaut de couleurs.

Exercice 3.10

Dans une école d'informatique, les étudiants rendent régulièrement des travaux pratiques de programmation. Mais certains étudiants veulent faire les malins et se permettent de tricher (en copiant les rendus des promotions précédentes, ou en faisant faire leur travail par ChatGPT par exemple). L'équipe enseignante a donc conçu un algorithme pour détecter la triche dans les rendus. Les données sont les suivantes :

— Il y a de la triche dans 10% des rendus.
— Parmi les rendus qui contiennent de la triche, 98% sont classés «triche» par l'algorithme de détection.
— Parmi les rendus qui ne contiennent pas de triche, 95% ne sont pas classés «triche» par l'algorithme.

On tire un rendu au hasard et on définit les événements :

$$T = \text{«Le rendu a de la triche»} \qquad \text{et} \qquad CT = \text{«Le rendu est classé triche par l'algorithme»}$$

N.B. : vous justifierez vos résultats à l'aide d'une formule du cours et vous les donnerez sous forme de pourcentage ou de fraction simplifiée.

1. Traduire les données en termes de probabilités au moyen des événements définis ci-dessus.
2. On choisit au hasard un rendu. Quelle est la probabilité que ce rendu soit classé «triche» par l'algorithme ?
3. Un rendu a été classé «triche» par l'algorithme. Quelle est la probabilité qu'il y ait effectivement de la triche dans ce rendu ?

★ **Exercice 3.11**

On considère deux dés A et B, contenant pour A 4 faces rouges et 2 faces blanches, et pour B 2 faces rouges et 4 faces blanches. On lance une pièce de monnaie truquée dont la probabilité de tomber sur pile est de $1/3$ afin de déterminer le dé utilisé dans l'expérience : dans le cas d'un pile, on joue uniquement avec le dé A, dans le cas d'un face uniquement avec le dé B.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir une face rouge au premier lancer de dé.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'au cours des n premiers lancers, on a obtenu à chaque fois une face rouge. Déterminer la probabilité d'avoir utilisé le dé A.
3. Supposons que l'on obtienne une face rouge aux deux premiers lancers. Déterminer la probabilité d'obtenir une face rouge au troisième lancer.

6. On ne se rappelle jamais de cette formule, souvent on en réécrit la preuve lorsqu'on explicite un raisonnement.

Exprimer vos résultats (a) par une formule utilisant des probabilités conditionnelles ; (b) par une fraction simplifiée.

Exercice 3.12

Afin de grappiller les points ANAC nécessaires à la validation de leur semestre, les élèves de l'EPITA ont le choix entre deux modes d'obtention : le sport et la participation aux journées portes ouvertes. On estime que 60% des élèves obtiennent des points grâce au sport, et que 50% participent aux journées portes ouvertes. De plus, un tiers des élèves faisant du sport ont également participé aux journées portes ouvertes.

Représenter graphiquement ce problème, et déterminer la proportion d'élèves qui vont devoir redoubler pour n'avoir obtenu aucun point ANAC lors de ce semestre. Exprimer le résultat (a) par une formule utilisant des probabilités conditionnelles ; (b) par une fraction simplifiée.

4 Variables aléatoires discrètes finies

4.1 Résumé

Le comportement d'une variable aléatoire s'étudie souvent par le biais de mesures de ***centrage*** et de ***dispersion***. Pour ces deux types de mesure on peut penser aux grandeurs statistiques de ***moyenne*** pour le centrage et de ***variance*** ou ***écart-type*** pour ce qui est de la dispersion. En théorie des probabilités, on parle d'***espérance*** d'une variable aléatoire, et non de moyenne, et toujours de variance ou d'écart-type. Ces mesures sont liées aux moments d'ordres 1 et 2 de la variable aléatoire. Les moments d'une variable aléatoire caractérisent celle-ci, si bien que dans certains cas [7] on remplacera des variables aléatoires compliquées par des modélisations plus simples mais ayant les mêmes moments, la légère perte de précision étant compensée par la plus grande facilité de calcul.

4.2 Exercices

Exercice 4.13

1. Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs. Rappeler comment on calcule son espérance et sa variance. Expliquer ces deux notions. Connaissez-vous des formules sur l'espérance et la variance de variables aléatoires finies ?
2. On lance une fois un dé équilibré. On note :
   — T la variable aléatoire égale au numéro qui apparait sur la face du dé.
   — X la variable aléatoire correspondant au double du numéro de la face apparue moins 6.
   (a) Donner la loi de T. En déduire $E(T)$ et $V(T)$.
   (b) Quelles sont les valeurs prises par X ? Relier la variable X à la variable T.
   (c) En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 4.14

Une urne contient quatre boules bleues numérotées de 1 à 4, trois boules rouges numérotées de 1 à 3 et deux boules vertes numérotées de 1 à 2. On tire une boule de l'urne.

1. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule tirée.
   Trouver la loi de X, son espérance et sa variance.
2. On joue au jeu suivant : on tire une boule de l'urne.
   • Si la boule tirée est bleue et porte un numéro pair, le joueur gagne 2 euros.
   • Si la boule tirée n'est pas bleue et porte un numéro pair, le joueur gagne 3 euros.

7. Cela dépend bien évidemment de la pertinence de l'approximation, mais c'est assez fréquent pour des valeurs très grandes, où les comparaisons asymptotiques entre les lois sont plutôt bonnes. Vous remarquerez à l'exercice 5-22 que sur un grand échantillon une loi hypergéométrique peut être approchée par une loi binomiale. Et vous verrez plus tard que la loi binomiale, sous certaines approximations, peut elle-même être appprochée par une loi de Poisson...

• Sinon, le joueur ne gagne rien.

On note Y la variable aléatoire correspondant au gain obtenu pendant ce jeu.

(a) Trouver la loi de Y.

(b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne de l'argent ?

Exercice 4.15

(**Travail personnel obligatoire**) On tire une main de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, et on note X la variable aléatoire associée au nombre de cœurs obtenus.

1. Quel est l'ensemble des valeurs possibles pour X ?
2. Déterminer la loi de X.
3. Calculer l'espérance de X. On pourra utiliser la formule suivante, appelée formule de Vandermonde : Pour a, b et n trois entiers tels que $n \leq a + b$,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$
4. $\star$ À l'aide d'un problème de dénombrement, montrer la formule de Vandermonde.

★ **Exercice 4.16**

Centrer et réduire ses données est un prétraitement statistique standard, il est en particulier utilisé pour préparer les entrées de certains algorithmes d'apprentissage automatique.

Définition 4.1. *La variable aléatoire* ***centrée réduite*** *associée à une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ admettant*[8] *une espérance et une variance non nulle*[9] *est la variable aléatoire*
$$\overline{X} = \frac{X - E(X)}{\sigma_X}.$$

Vérifier que $\mathrm{E}(\overline{X}) = 0$ et $\mathrm{V}(\overline{X}) = 1$.

Exercice 4.17

1. Dans un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de dames obtenues et Y la variable correspondant au nombre de cœurs.
   a. Déterminer les lois de X et Y.
   b. Représenter la loi couple (X, Y) sous forme de tableau.
   c. Montrer que X et Y sont indépendantes.
2. On tire maintenant deux cartes au hasard.
   a. Déterminer les lois de X et Y.
   b. Représenter la loi couple (X, Y) sous forme de tableau.
   c. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

5 Lois usuelles

5.1 Résumé

Certaines expériences aléatoires sont d'apparition fréquente en modélisation. Par exemple, les expériences aléatoires de tirage ou celles relatives au nombre d'échecs ou de réussites à un jeu. On appelle ***lois usuelles*** les lois de probabilité des variables aléatoires décrivant ces expériences aléatoires. Cette section introduit un certain nombre de lois usuelles et les folklores qui les accompagnent, parmi lesquelles on peut citer la loi uniforme, la loi de Bernoulli, la loi binomiale, et la loi hypergéométrique (cf. ex. 4-15).

8. La question de l'existence de l'espérance et de la variance ne se pose pas dans le cas des variables aléatoires finies. C'est en revanche un problème pour les variables aléatoires discrètes ou continues, que vous étudierez plus tard.

9. Attention à l'accord, seule la variance doit être non nulle. C'est le cas si la variable n'est pas constante.

5.2 Exercices

Exercice 5.18

On considère une v.a. finie suivant une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

1. Calculer son espérance.
2. Déterminer sa variance.

N.B. : On admet les résultats suivants :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 5.19

Un professeur de mathématiques a 40 copies de contrôle TD à corriger. Pour cela il utilise la méthode classique [10] : pour chaque copie, il lance un dé à 20 faces (numérotées de 1 à 20), et assigne à la copie le résultat obtenu.

1. Pour chaque élève i ($i \in \{1, \dots, 40\}$) on note N_i la variable aléatoire associée à la note obtenue. Quelle est la loi de N_i ? Déterminer son espérance. Quelle est la probabilité que l'élève i ait la moyenne (i.e. une note supérieure ou égale à 10) ?
2. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'élèves ayant la moyenne. Donner la loi de X.

Exercice 5.20

Un étudiant passe un examen sous forme de QCM. L'examen contient 20 questions numérotées de 1 à 20. Chaque question est notée sur 1 point. La note totale de l'épreuve est donc une note sur 20. C'est un QCM sans point négatif, ni point intermédiaire : à chaque question, la note obtenue ne peut être que 0 ou 1.

L'étudiant s'est mal préparé à l'examen et choisit de répondre au hasard. Ses réponses sont indépendantes et, pour chaque question, il répond juste avec une probabilité de $\frac{1}{3}$.

1. Soit $k \in [\![1, 20]\!]$. On considère la variable aléatoire X_k égale à la note obtenue à la question k.
   (a) À $k \in [\![1, 20]\!]$ fixé, donner la loi de X_k. Quel nom porte chacune des variables X_k ?
   (b) Calculer l'espérance et la variance de chaque X_k. Vous devez détailler tous vos calculs et ne surtout pas parachuter les résultats !
2. On considère maintenant la variable aléatoire Y égale à la note finale obtenue par l'étudiant à l'épreuve.
   (a) Écrire Y en fonction des X_k.
   (b) En justifiant proprement votre raisonnement, donner $P(Y = i)$ pour tout $i \in [\![0, 20]\!]$. Comment s'appelle la variable Y ?
   (c) Vérifier que $\sum_{i=0}^{20} P(Y = i) = 1$.
   (d) En justifiant le calcul, donner l'espérance et la variance de Y.

10. Il est de plus en plus dur de trouver des escaliers ayant le bon nombre de marches. De plus le principe de cette méthode étant de faire le moins d'efforts possibles, cela va mal avec le fait de devoir monter et descendre des escaliers.

Exercice 5.21

(Travail personnel) Un examen de mathématiques de $S1$ porte sur un chapitre au hasard parmi trois. Un élève de cette classe, désirant profiter du beau soleil du mois de juin, choisit de ne réviser que deux de ces chapitres.

Si l'examen porte sur un chapitre étudié, l'élève a 80% de chances de valider son examen ; tandis que si l'examen porte sur le chapitre négligé, les chances de valider tombent à 20%.

1. Représenter graphiquement ce problème.
2. Quelle est la probabilité que l'élève valide son examen ?
3. On suppose maintenant que l'élève a bien validé son examen. Quelle est la probabilité qu'il ait été interrogé sur un des chapitres révisés ?
4. L'ensemble des 40 élèves de cette classe choisit ce mode de révision. Donner la loi du nombre d'élèves validant leur examen, et calculer son espérance.

★ **Exercice 5.22**

1. En région parisienne, pour chaque naissance la probabilité d'avoir un garçon est de 46%. Déterminer la probabilité, pour une famille de 5 enfants, d'être composée de 2 garçons et 3 filles.
2. On considère maintenant un échantillon de 100 enfants, parmi lesquels on compte 46 garçons et 54 filles. Déterminer la probabilité que sur un ensemble de cinq enfants pris au hasard, on ait 2 garçons et 3 filles.
3. Pourquoi les deux questions précédentes mènent-elles à des modélisations différentes et ainsi à des résultats légèrement différents ?